

第3問～第5問は、いずれか2問を選択し、解答しなさい。

第3問 (選択問題) (配点 20)

数列 $\{a_n\}$ は、初項 a_1 が0であり、 $n = 1, 2, 3, \dots$ のとき次の漸化式を満たすものとする。

$$a_{n+1} =$$

$$\frac{n+3}{n+1} \{3a_n + 3^{n+1} - (n+1)(n+2)\} \dots\dots \textcircled{1}$$

(1) $a_2 = \boxed{\text{ア}}$ である。

(2) $b_n = \frac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}$ とおき、数列 $\{b_n\}$ の一般項

を求めよう。

$\{b_n\}$ の初項 b_1 は $\boxed{\text{イ}}$ である。① の両辺を

$3^{n+1}(n+2)(n+3)$ で割ると

$$b_{n+1} = b_n$$

$$+ \frac{\boxed{\text{ウ}}}{(n + \boxed{\text{エ}})(n + \boxed{\text{オ}})} - \left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}} \right)^{n+1}$$

を得る。ただし、 $\boxed{\text{エ}} < \boxed{\text{オ}}$ とする。

したがって

$$b_{n+1} - b_n =$$

$$\left(\frac{\boxed{\text{キ}}}{n + \boxed{\text{エ}}} - \frac{\boxed{\text{キ}}}{n + \boxed{\text{オ}}} \right) - \left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}} \right)^{n+1}$$

である。

n を 2 以上の自然数とするとき

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\boxed{\text{キ}}}{k + \boxed{\text{工}}} - \frac{\boxed{\text{キ}}}{k + \boxed{\text{才}}} \right) = \frac{1}{\boxed{\text{ク}}} \left(\frac{n - \boxed{\text{ケ}}}{n + \boxed{\text{コ}}} \right)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}} \right)^{k+1} = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} - \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}} \right)^n$$

が成り立つことを利用すると

$$b_n = \frac{n - \boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}} (n + \boxed{\text{チ}})} + \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}} \right)^n$$

が得られる。これは $n = 1$ のときも成り立つ。

(3) 17 ページの(2)により, $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \boxed{\text{ツ}}^{n - \boxed{\text{テ}}} \left(n^2 - \boxed{\text{ト}} \right) + \frac{(n + \boxed{\text{ナ}})(n + \boxed{\text{ニ}})}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

で与えられる。ただし, $\boxed{\text{ナ}} < \boxed{\text{ニ}}$ とする。

このことから, すべての自然数 n について, a_n は整数となることがわかる。

(4) k を自然数とする。 a_{3k} , a_{3k+1} , a_{3k+2} を 3 で割った余りはそれぞれ $\boxed{\text{ネ}}$, $\boxed{\text{ノ}}$, $\boxed{\text{ハ}}$ である。また, $\{a_n\}$ の初項から第 2020 項までの和を 3 で割った余りは $\boxed{\text{ヒ}}$ である。